

Von den natürlichen Zahlen zu den Quaternionen

Gerhard Dorfer, TU Wien
Zusammenfassung

Bei den Zahlbereichserweiterungen von den natürlichen bis hin zu den komplexen Zahlen kommen mit einer Ausnahme, nämlich der Bildung der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen, durchwegs einfache algebraische Konstruktionen zur Anwendung. Ausgehend von den natürlichen Zahlen werden jeweils auf die bereits vorhandene Struktur aufbauend neue Objekte definiert, wobei die neue Struktur in gewisser Hinsicht mehr leistet, andererseits gehen aber auch wichtige Eigenschaften bei der Erweiterung verloren. Motiviert werden die Erweiterungen jeweils über das Lösen von Gleichungen. Schließlich werden noch die Quaternionen eingeführt und als eine Anwendung ihre Nützlichkeit bei der Beschreibung von Drehstreckungen bzw. Drehungen im dreidimensionalen Anschauungsraum aufgezeigt. In einer Zusammenschau könnten entsprechend ausgewählte Teilbereiche z.B. in Form einer Fachbereichsarbeit behandelt werden und dabei zu einem besseren Verständnis der Zahlbereiche und ihrer wesentlichen Merkmale beitragen.

1 Natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen bilden die Grundlage jeglicher Arithmetik und entstehen durch eine Abstraktion des Zählprozesses. Obwohl die Axiomatisierung der natürlichen Zahlen hier nicht im Mittelpunkt steht, sollen doch ein paar Bemerkungen hierzu angefügt werden.

Die gesamte Mathematik lässt sich auf dem Fundament der Mengenlehre aufbauen. Das Axiomensystem der Mengenlehre nach E.Zermelo und A.Fraenkel ist darauf ausgerichtet, dass die Existenz der natürlichen Zahlen unmittelbar aus diesen Axiomen abgeleitet werden kann. Ohne auf Details einzugehen, wird hierbei der dem Zählen zu Grunde liegende Vorgang des Hinzufügens von 1 mengentheoretisch gefasst und die natürlichen Zahlen als kleinste Menge definiert, die gegenüber diesem Prozess abgeschlossen ist und die Zahl 0^1 ($= \emptyset$ leere Menge) als Ausgangspunkt enthält (siehe z.B. [2], Unterabschnitt 13.2).

Vorausgegangen ist dieser Fundierung eine Beschreibung der natürlichen Zahlen durch G.Peano, der das Zählen durch eine sogenannte Nachfolgerfunktion S modelliert (für eine natürliche Zahl n ist $S(n)$ als $n + 1$ zu verstehen). Sinngemäß lauten seine Axiome wie folgt:

1. Es gibt eine natürliche Zahl namens 0.
2. Jeder natürlichen Zahl n ist (eindeutig) eine natürliche Zahl $S(n)$ zugeordnet. $S(n)$ heißt Nachfolger von n .
3. 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. Die Nachfolgerfunktion S ist injektiv, d.h. aus $n_1 \neq n_2$ folgt $S(n_1) \neq S(n_2)$.

¹ganausogut könnte man bei 1 anstatt bei 0 beginnen

5. Enthält eine Teilmenge M der natürlichen Zahlen die Zahl 0 und ist mit jeder Zahl n aus M auch ihr Nachfolger $S(n)$ aus M , so enthält M schon alle natürlichen Zahlen.

Das Axiom 5. wird auch als Induktionsaxiom bezeichnet und stellt die oben angesprochene Minimalität der natürlichen Zahlen sicher. Wir bezeichnen in der Folge wie üblich die natürlichen Zahlen mit \mathbb{N} , $S(0) =: 1$, $S(1) =: 2$, und so fort. Auf \mathbb{N} wird dann induktiv (d.h. mit Hilfe des Rekursionssatzes, der wiederum auf dem Induktionsaxiom fußt, siehe z.B. [2], Unterabschnitt 1.2) eine Addition $+$ und darauf aufbauend eine Multiplikation \cdot durch folgende Festlegungen für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$ definiert:

$$\begin{aligned} n + 0 &:= n, & n + S(m) &:= S(n + m), \\ n \cdot 0 &:= 0, & n \cdot S(m) &:= n \cdot m + n. \end{aligned}$$

Mit Induktionsbeweisen, die ihre Grundlage wiederum im Induktionsaxiom haben, weist man dann leicht die Gültigkeit folgender Rechengesetze bzw. Eigenschaften für die algebraische Struktur $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ nach:

- $+$ und \cdot sind kommutativ,
- $+$ und \cdot sind assoziativ,
- \cdot ist distributiv bzgl. $+$,
- 0 ist neutrales Element für $+$, 1 ist neutrales Element für \cdot ,
- $+$ ist regulär, d.h. $n + m_1 = n + m_2 \Rightarrow m_1 = m_2$,
- \cdot ist mit Ausnahme von 0 regulär, d.h. $n \cdot m_1 = n \cdot m_2, n \neq 0 \Rightarrow m_1 = m_2$.

Die natürlichen Zahlen besitzen auch eine natürliche Ordnungsstruktur \leq , die sich mit Hilfe der Addition wie folgt definieren lässt:

$$n \leq m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : m = n + k.$$

Dies führt auf die bekannte Anordnung der natürlichen Zahlen

$$0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq \dots,$$

die auch die anschauliche Vorstellung der natürlichen Zahlen als in dieser Reihenfolge eingetragene Punkte auf dem Zahlenstrahl prägt. Je zwei Elemente $n, m \in \mathbb{N}$ sind miteinander vergleichbar, d.h. es gilt $n \leq m$ oder $m \leq n$, und \leq ist mit $+$ und \cdot verträglich, d.h. für alle $n, m, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n \leq m \Rightarrow n + k \leq m + k, \quad nk \leq mk.$$

Von großer Bedeutung ist weiters, dass (\mathbb{N}, \leq) eine sogenannte Wohlordnung bildet, d.h. jede nichtleere Teilmenge von \mathbb{N} besitzt ein kleinstes Element (die duale Aussage über die Existenz eines größten Elementes stimmt natürlich nicht).

Den anschließend besprochenen Zahlbereichserweiterungen ist gemein, dass zunächst eine neue umfassendere Menge von Objekten betrachtet wird, die durch die Bildung kartesischer Produkte aus dem bereits bestehenden Zahlbereich entsteht (eine Ausnahme ist

die Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen) und anschließend gewisse Objekte identifiziert und zu Klassen zusammengefasst werden (Ausnahme: komplexe Zahlen). Diese Klassen bilden dann den neuen Zahlbereich. Die Einteilung in Klassen geschieht durch Angabe aller Paare zu identifizierender Elemente. Die so entstehende binäre Relation \sim ist eine Äquivalenzrelation, d.h. sie ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

1. \sim ist reflexiv: für alle x gilt $x \sim x$,
2. \sim ist symmetrisch: aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$,
3. \sim ist transitiv: aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$.

Die Relation \sim teilt die zu Grunde liegende Menge M in zueinander disjunkte Klassen ein: für $x \in M$ ist

$$[x]_{\sim} = \{y \in M \mid y \sim x\}$$

die Äquivalenzklasse von x . Die Menge aller Äquivalenzklassen

$$M/\sim = \{[x]_{\sim} \mid x \in M\}$$

heißt Faktormenge von M bzgl. \sim .

Zum Beispiel kann man auf der Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} folgende Äquivalenzrelation erklären:

$$x \sim y :\Leftrightarrow x \text{ und } y \text{ ergeben bei Division durch } 3 \text{ den gleichen Rest}$$

Für diese Relation erhält man 3 Äquivalenzklassen: $\mathbb{N}/\sim = \{[0]_{\sim}, [1]_{\sim}, [2]_{\sim}\}$ mit

$$[0]_{\sim} = \{0, 3, 6, \dots\}, \quad [1]_{\sim} = \{1, 4, 7, \dots\}, \quad [2]_{\sim} = \{2, 5, 8, \dots\}.$$

2 Ganze Zahlen

Wie bereits angesprochen lassen sich die Zahlbereichserweiterungen durch das Bestreben motivieren, gewisse Typen von Gleichungen lösen zu können. Für gegebene $a, b \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung

$$a + x = b \tag{1}$$

im allgemeinen keine Lösung x in \mathbb{N} . Eine Lösung existiert genau dann, wenn $a \leq b$ ist. Durch die Konstruktion der ganzen Zahlen wird erreicht, dass diese Gleichung stets eine Lösung besitzt.

Wir betrachten vorerst die Menge $Z = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Der Leitgedanke ist nun, dass das Paar $(b, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Lösung von (1) werden soll, also die (erst zu definierende) Differenz $b - a$ repräsentiert. Da wegen der Regularität der Addition die Gleichung (1) und die Gleichung

$$a + k + x = b + k$$

für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ dieselbe Lösung x haben, müssen wir in der Menge Z folgende Paare identifizieren, um eindeutige Lösungen zu gewährleisten:

$$(b_1, a_1) \sim (b_2, a_2) \Leftrightarrow b_1 + a_2 = b_2 + a_1.$$

Man überprüft leicht, dass eine Äquivalenzrelation vorliegt. Exemplarisch führen wir den Nachweis für die Transitivität: Aus $(b_1, a_1) \sim (b_2, a_2)$ und $(b_2, a_2) \sim (b_3, a_3)$ folgt

$$b_1 + a_2 = b_2 + a_1, \quad b_2 + a_3 = b_3 + a_2,$$

addiert man die beiden linken und die beiden rechten Seiten so erhält man

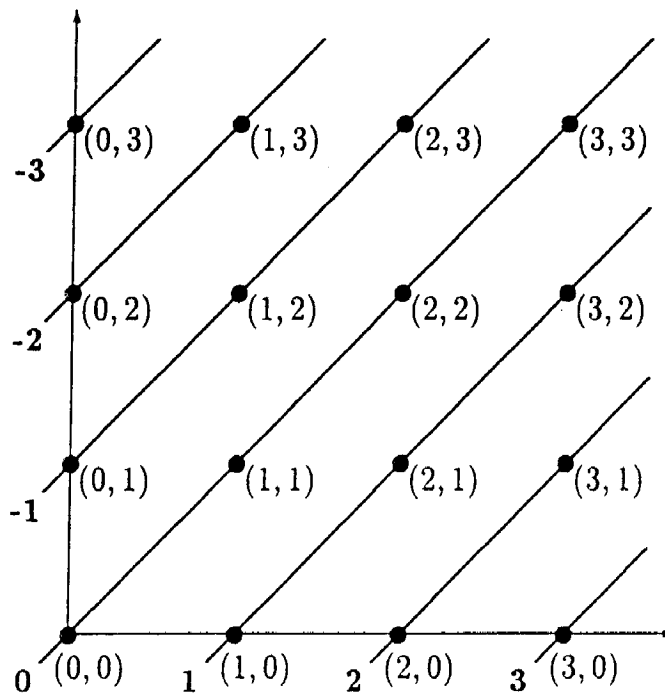
$$b_1 + a_2 + b_2 + a_3 = b_2 + a_1 + b_3 + a_2,$$

kürzt man a_2 und b_2 auf beiden Seiten (Regularität!) dann folgt

$$b_1 + a_3 = b_3 + a_1,$$

also $(b_1, a_1) \sim (b_3, a_3)$.

Nun definiert man die ganzen Zahlen als Faktormenge $\mathbb{Z} := Z/\sim$. Die Klasse $[(0, 0)]_\sim = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), \dots\}$ repräsentiert der Konstruktionsidee nach die Lösung x der Gleichung $0 + x = 0$, also die Zahl $x = 0$. Allgemein entspricht für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ der Klasse $[(n, 0)]_\sim = \{(n, 0), (n + 1, 1), (n + 2, 2), \dots\}$ die Lösung der Gleichung $0 + x = n$, also $x = n$. Wir werden also künftig für die Klasse $[(n, 0)]_\sim$ zur Abkürzung wieder n schreiben. Daneben existieren jedoch auch die Klassen $[(0, n)]_\sim$, die die Lösung der Gleichung $n + x = 0$ darstellen sollen. Für die Klasse $[(0, n)]_\sim$ führen wir aus diesem Grund die Bezeichnung $-n$ ein. Da für beliebige $a, b \in \mathbb{N}$ die Beziehung $a \leq b$ oder $b \leq a$ gilt, also $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $a + k = b$ oder $b + k = a$, erhält man $[(b, a)]_\sim = [(k, 0)]_\sim$ oder $[(b, a)]_\sim = [(0, k)]_\sim$. Das heißt jede Kongruenzklasse ist von der Form $k = [(k, 0)]_\sim$ oder $-k = [(0, k)]_\sim$, $k \in \mathbb{N}$.



Erklärung der Abbildung: Die Konstruktion der ganzen Zahlen als Äquivalenzklassen von Paaren natürlicher Zahlen soll in dieser Graphik deutlich werden. Die durchgezogenen dickeren Linien sollen das Zusammenfassen der auf diesen Geraden liegenden Zahlenpaare andeuten. Die fettgedruckten Ziffern stehen für die dadurch konstruierten ganzen Zahlen (siehe auch [4, Seite 54]).

Die Addition und Multiplikation ganzer Zahlen ergibt sich nun zwingend, wenn die Rechengesetze (Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetz) erhalten bleiben sollen: $[(b, a)]_{\sim}$ bzw. $[(d, c)]_{\sim}$ ist Lösung der Gleichung $a + x = b$ bzw. $c + y = d$, also folgt $(a + c) + (x + y) = (b + d)$, d.h. man definiert:

$$[(b, a)]_{\sim} + [(d, c)]_{\sim} := [(b + d, a + c)]_{\sim}.$$

Somit lässt sich auch unser Leitmotiv über die Bedeutung von (b, a) präzisieren:

$$[(b, a)]_{\sim} = [(b, 0)]_{\sim} + [(0, a)]_{\sim} = b + (-a) =: b - a.$$

Ähnliche Überlegungen wie bei der Addition führen zu

$$[(b, a)]_{\sim} \cdot [(d, c)]_{\sim} := [(bd + ac, ad + bc)]_{\sim}.$$

Bei der Definition der Operationen muss man sich natürlich überlegen, dass diese Festlegungen vom jeweiligen Repräsentanten unabhängig sind, d.h. aus $(b_1, a_1) \sim (b_2, a_2)$ und $(d_1, c_1) \sim (d_2, c_2)$ folgt $(b_1 + d_1, a_1 + c_1) \sim (b_2 + d_2, a_2 + c_2)$ und $(b_1 d_1 + a_1 c_1, a_1 d_1 + b_1 c_1) \sim (b_2 d_2 + a_2 c_2, a_2 d_2 + b_2 c_2)$. Dies lässt sich durch einfache Rechnung bestätigen.

Erklärt man die Ordnungsrelation für $x, y \in \mathbb{Z}$ wie zuvor

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : x + k = y,$$

so führt dies zur Bedingung

$$[(b, a)]_{\sim} \leq [(d, c)]_{\sim} \Leftrightarrow b + c \leq a + d.$$

Bilanz: Für $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bleiben alle für $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ angeführten Rechengesetze erhalten, zusätzlich gilt:

- Für alle $x \in \mathbb{Z}$ existiert $-x$: $x + (-x) = 0$. In der Darstellung als Äquivalenzklassen gilt $-[(b, a)]_{\sim} = [(a, b)]_{\sim}$.
- Für $u, v \in \mathbb{Z}$ hat jede Gleichung der Form $u + x = v$ die eindeutige Lösung $x = v + (-u)$

Alle Eigenschaften können sehr leicht nachgerechnet werden.

Bezüglich der Ordnungsrelation verliert man jedoch eine Eigenschaft: (\mathbb{Z}, \leq) ist keine Wohlordnung mehr, so besitzt z.B. die Gesamtmenge \mathbb{Z} kein kleinstes Element. Des Weiteren ist die Ordnung nur mehr eingeschränkt mit der Multiplikation verträglich: aus $x \leq y$ folgt $xz \leq yz$ nur noch für $0 \leq z$.

3 Rationale Zahlen

Als Motivation für eine Erweiterung der ganzen Zahlen lässt sich angeben, dass für gegebene $a, b \in \mathbb{Z}$ die Gleichung

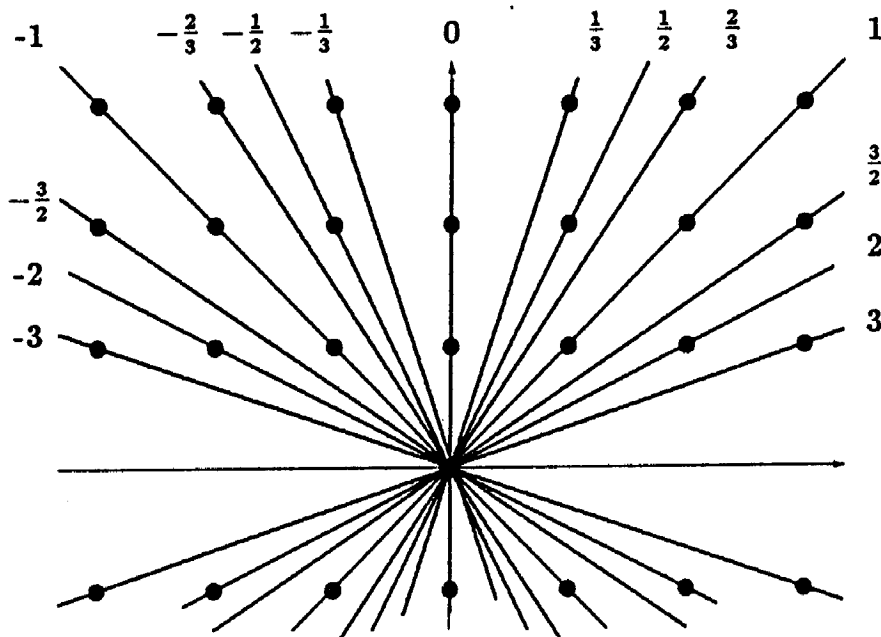
$$a \cdot x = b \tag{2}$$

im allgemeinen keine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ besitzt. Für den Fall $a = 0, b \neq 0$ spricht Grundsätzliches gegen die Existenz einer Lösung: Will man nämlich die Regularität für $+$ und die Distributivität von \cdot gegenüber $+$ beibehalten, so gilt für beliebiges $x: 0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, woraus durch Kürzen $0 \cdot x = 0$ folgt. Von diesem Fall abgesehen erweist sich eine Lösung von (2) jedoch als möglich.

Man betrachtet zuerst $Q = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Die Grundgedanke besteht nun - ganz analog zur Konstruktion der ganzen Zahlen - darin, das Paar $(b, a) \in Q$ als Lösung von (2) vor Augen zu haben. In der Tat kommt diese Idee in der für rationale Zahlen verwendeten Schreibweise als Bruch $\frac{b}{a}$ noch deutlich zum Ausdruck. Wie zuvor müssen gewisse Paare identifiziert werden, um eine eindeutige Lösung von (2) zu erhalten:

$$(b_1, a_1) \sim (b_2, a_2) \Leftrightarrow a_1 b_2 = a_2 b_1.$$

Diese Relation \sim ist wieder eine Äquivalenzrelation und man definiert die rationalen Zahlen als Faktormenge: $\mathbb{Q} = Q/\sim$. Die ganzen Zahlen findet man in den rationalen Zahlen nun wie folgt wieder: $z \in \mathbb{Z}$ ist Lösung x von $1 \cdot x = z$, also schreiben wir für $[(z, 1)]_\sim = \{(z, 1), (-z, -1), (2z, 2), (-2z, -2), \dots\}$ der Kürze halber wieder z . Die rationale Zahl $[(1, z)]_\sim$, d.h. die Lösung von $z \cdot x = 1$ wird mit $\frac{1}{z}$ oder z^{-1} bezeichnet. Dem Kürzen eines Bruches entspricht bei diesem Zugang nichts anderem als dem Übergang zu einem anderen Repräsentanten derselben Äquivalenzklasse: $(3, 12) \sim (1, 4)$, also $[(3, 12)]_\sim = [(1, 4)]_\sim = \frac{1}{4}$.



Erklärung der Abbildung: Die Konstruktion der rationalen Zahlen aus den ganzen Zahlen soll mit dieser Graphik verdeutlicht werden. Die Punkte symbolisieren die Elemente aus Q und wurden aus Platzgründen

nicht beschriftet. Wie zuvor sollen die durchgezogenen dickeren Linien das Zusammenfassen der auf diesen Geraden liegenden Zahlenpaare andeuten. Die fettgedruckten Ziffern stehen für die Äquivalenzklassen und stellen jeweils eine rationale Zahl dar. Man beachte, wie selbstverständlich sich die Ordnungsrelation ergibt (siehe auch [4], Seite 56).

Man möchte natürlich auch für rationale Zahlen die Rechengesetze bewahren. Das wirkt sich z.B. auf die Addition wie folgt aus: für $x = [(b, a)]_{\sim}$, $y = [(d, c)]_{\sim}$, haben wir (gemäß unserer Interpretation dieser Größen) $ax = b$, $cy = d$. Multipliziert man die erste Gleichung mit c , die zweite mit a , addiert beide Gleichungen und fasst auf der linken Seite zusammen, so erhält man $ac(x + y) = ad + bc$. Das führt zur Definition:

$$[(b, a)]_{\sim} + [(d, c)]_{\sim} := [(ad + bc, ac)]_{\sim}.$$

Unmittelbar ergibt sich durch solche Überlegungen die Multiplikation:

$$[(b, a)]_{\sim} \cdot [(d, c)]_{\sim} = [(bd, ac)]_{\sim}.$$

Damit können wir zu unserem Ausgangspunkt zurückkehren:

$$[(b, a)]_{\sim} = [(b, 1)]_{\sim} \cdot [(1, a)]_{\sim} = b \cdot a^{-1} =: \frac{b}{a}.$$

Die Ordnung auf \mathbb{Q} kann in folgender Weise festgelegt werden: $[(b, a)]_{\sim}$ heißt positiv, wenn $a, b > 0$ oder $a, b < 0$. Damit definiert man:

$$[(b, a)]_{\sim} < [(d, c)]_{\sim} :\Leftrightarrow [(d, c)]_{\sim} - [(b, a)]_{\sim} \text{ positiv.}$$

Bilanz: In $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ bleiben alle für $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ angeführten Rechengesetze erhalten, zusätzlich gilt:

- Für alle $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ existiert $x^{-1} \in \mathbb{Q}$: $x \cdot x^{-1} = 1$. In der Schreibweise der Äquivalenzklassen gilt: $[(b, a)]_{\sim}^{-1} = [(a, b)]_{\sim}$.
- Für $u, v \in \mathbb{Q}$, $u \neq 0$, hat die Gleichung $ux = v$ die eindeutige Lösung $x = v \cdot u^{-1}$.

Für die Ordnung gilt: wenn $a < b$, dann existieren unendlich viele $x \in \mathbb{Q}$ mit $a < x < b$. Zum Beispiel bekommt man durch fortgesetztes Halbieren $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = \frac{a+x_1}{2} = \frac{3a+b}{4}$, allgemein $x_n = \frac{(2^n - 1)a + b}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge rationaler Zahlen x_n mit $a < x_n < b$. Man sagt dazu auch: (\mathbb{Q}, \leq) ist eine dichte Ordnung.

4 Reelle Zahlen

Schon im 5. Jahrhundert vor Chr. sind die Pythagoreer auf Größen gestoßen, die bei einfachen geometrischen Zusammenhängen auftreten und sich nicht als rationale Zahlen darstellen lassen. So gilt beispielsweise für die Länge x der Diagonale eines Quadrates mit Seitenlänge 1 die Gleichung

$$x^2 = 2.$$

Diese Gleichung ist jedoch in \mathbb{Q} nicht lösbar, wie man durch einfache Teilbarkeitsüberlegungen zeigen kann.

Die Konstruktion der reellen Zahlen löst nicht nur dieses Problem, sondern geht viel weiter. Die Grundidee bei dem hier gewählten Zugang besteht darin, irrationale Größen (wie z.B. Wurzeln oder die Kreiszahl π) durch eine Folge von rationalen Näherungswerten zu beschreiben, die sich dieser Größe immer besser anpassen. Diese Anpassung hat eine Art Kontraktionseigenschaft dieser Folgen zur Konsequenz. Umgekehrt geht man soweit, jede Folge von rationalen Zahlen, die diese Kontraktionseigenschaft aufweist, als reelle Zahl anzusehen, wobei wieder gewisse Identifikationen vorzunehmen sind.

Wie bereits erwähnt, ist diese Erweiterung von anderer Art als die übrigen. Sie ist von nicht algebraischer Natur in dem Sinn, dass neue Objekte auftreten, die nicht durch einfache algebraische Sachverhalte charakterisiert werden können, wie dies auf additive (multiplikative) Inverse bei den ganzen (rationalen) Zahlen zutrifft. Vielmehr dominieren ordnungstheoretische bzw. topologische Gesichtspunkte. Anschaulich gesprochen kann die Konstruktion der reellen Zahlen als ein Schließen der Lücken auf der Zahlengerade verstanden werden. Die reellen Zahlen entstehen als ein Modell bei der Analyse des Messprozesses. Die Idee des Kontinuierlichen erfährt durch die reellen Zahlen eine mögliche Realisierung. Daneben gibt es auch andere Möglichkeiten, eine Art Vervollständigung der rationalen Zahlen vorzunehmen wie z.B. die Nonstandard Analysis (siehe z.B. Kapitel 11 in [2]) oder einen konstruktiven Zugang (vgl. z.B. [5]).

Im Folgenden sei $\langle x_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge rationaler Zahlen. Zunächst wiederholen wir die wichtige Begriffsbildung der Konvergenz:

- Eine Folge $\langle x_n \rangle$ heißt konvergent zum Grenzwert x , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N(\varepsilon) : |x_n - x| < \varepsilon.$$

Nun präzisieren wir die angesprochene Kontraktionseigenschaft:

- Eine Folge $\langle x_n \rangle$ heißt Cauchy-Folge (kurz C-Folge), wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n, m \geq N(\varepsilon) : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Eine konvergente Folge nähert sich dem Grenzwert beliebig genau an in dem Sinne, daß jedes offene Intervall (und sei es noch so klein), welches den Grenzwert enthält, alle Folgenglieder mit entsprechend großem Index ($\geq N(\varepsilon)$) enthält. Eine C-Folge hat die Eigenschaft, daß sich zwei Folgenglieder um beliebig wenig unterscheiden, wenn nur die Indizes entsprechend groß sind. Auch sie scheint sich auf der Zahlengerade auf einen Punkt zusammenzuziehen, nur kommt dieser Punkt in der Formulierung nicht vor und die Idee besteht jetzt darin, diesen Punkt durch diese C-Folge zu charakterisieren, ihn dadurch festzulegen. Wir betrachten also die Menge

$$R := \{ \text{Menge aller C-Folgen rationaler Zahlen} \}.$$

Jede konvergente Folge ist eine C-Folge, wie man leicht aus folgender Ungleichungskette ersieht:

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)| \leq |x_n - x| + |x - x_m|,$$

da man die beiden Summanden im letzten Ausdruck für eine konvergente Folge $\langle x_n \rangle$ mit Grenzwert x bei entsprechend großem n und m beliebig klein machen kann, gilt dies also

auch für den ersten Term. Die Umkehrung dieser Aussage stimmt in den rationalen Zahlen nicht. Dafür ein Beispiel:

Sei $\langle x_n \rangle$ durch folgende Rekursion definiert:

$$x_0 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right), \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Für diese Folge kann man durch einfache Rechnung zeigen:

1. $x_{n+1}^2 - 2 = \frac{1}{4} \left(x_n - \frac{2}{x_n} \right)^2 \geq 0$, also $x_n^2 \geq 2$, für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. $x_n^2 \leq 2 + \frac{1}{2^{n-1}}$, dies läßt sich unter Verwendung von 1. mit vollständiger Induktion nachweisen.

Es gelten also für die Folge $\langle x_n^2 \rangle$ die Ungleichungen

$$2 \leq x_n^2 \leq 2 + \frac{1}{2^n}.$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \frac{1}{2^n} = 2$, erhält man nach einem bekannten Satz über Folgen auch $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = 2$.

Wir zeigen nun, daß $\langle x_n \rangle$ wohl eine C-Folge ist aber nicht konvergiert:

Aus der Positivität der Folgenglieder und $x_n^2 \geq 2$ folgt insbesondere $x_n + x_m \geq 1$. Daraus erhält man

$$|x_n - x_m| \leq (x_n + x_m)|x_n - x_m| = |x_n^2 - x_m^2|.$$

Weil $\langle x_n^2 \rangle$ konvergent ist, wird der Ausdruck ganz rechts für entsprechend große Zahlen n und m beliebig klein und damit auch der Ausdruck ganz links, also ist $\langle x_n \rangle$ eine C-Folge.

Wäre $\langle x_n \rangle$ konvergent gegen x , so würde folgen

$$2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^2,$$

also $x^2 = 2$, was für eine rationale Zahl x nicht möglich ist.

Die eben besprochene Folge rationaler Zahlen $\langle x_n \rangle$ stellt also einen aussichtsreichen Kandidaten für die Lösung x der Gleichung $x^2 = 2$ dar. Man muß allerdings berücksichtigen, daß es noch weitere Folgen gibt, die Selbiges wie $\langle x_n \rangle$ leisten: Zum Beispiel gilt auch für $y_n = \frac{2}{x_n}$: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^2 = 2$, y_n ist C-Folge aber nicht konvergent. Solche Folgen müssen als gleich angesehen werden.

Allgemein wird das wie folgt bewerkstelligt: Seien $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle \in R$. Wir erklären $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ als äquivalent und schreiben dafür wie gewohnt $\langle a_n \rangle \sim \langle b_n \rangle$, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0.$$

Diese Relation ist wieder eine Äquivalenzrelation und die reellen Zahlen definiert man als Faktormenge: $\mathbb{R} := R/\sim$. Eine reelle Zahl ist also in diesem Sinne eine Klasse von äquivalenten C-Folgen. Eine rationale Zahl x wird z.B. durch die konstante Folge mit dem Wert x repräsentiert, oder auch durch die Folge $x_n = x + \frac{1}{n}$.

Einige weitere Beispiele von C-Folgen, die in \mathbb{Q} nicht konvergieren:

- $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $[\langle a_n \rangle]_{\sim} = e$, wobei e die Eulersche Zahl ist.
- $b_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$, $[\langle b_n \rangle]_{\sim} = [\langle a_n \rangle]_{\sim} = e$.
- $c_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$, $[\langle c_n \rangle]_{\sim} = \frac{\pi}{4}$.
- $d_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, $[\langle d_n \rangle]_{\sim} = \ln 2$ (\ln bezeichnet den natürlichen Logarithmus).

Die Rechenoperationen auf \mathbb{R} werden folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} [\langle a_n \rangle]_{\sim} + [\langle b_n \rangle]_{\sim} &:= [\langle a_n + b_n \rangle]_{\sim} \\ [\langle a_n \rangle]_{\sim} \cdot [\langle b_n \rangle]_{\sim} &:= [\langle a_n \cdot b_n \rangle]_{\sim} \end{aligned}$$

Dabei ist natürlich nachzuprüfen, dass für C-Folgen $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ auch $\langle a_n + b_n \rangle$ und $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ C-Folgen sind und die Definition der Operationen nicht von den Repräsentanten der Klassen abhängt, was einfaches Nachrechnen zeigt. Eine ausführlichere Darstellung dazu findet man z.B. in [3].

Zur Ordnungsrelation auf \mathbb{R} : für $[\langle a_n \rangle]_{\sim} \neq [\langle b_n \rangle]_{\sim}$ definiert man

$$[\langle a_n \rangle]_{\sim} < [\langle b_n \rangle]_{\sim} \Leftrightarrow \exists N \forall n \geq N : a_n < b_n.$$

Bilanz: Mit diesen Festlegungen bleiben alle zuvor für die rationalen Zahlen erwähnten Rechengesetze und Eigenschaften der Ordnungsrelation erhalten. Zusätzlich erhält man für reelle Zahlen:

- Jede Cauchy-Folge reeller Zahlen ist konvergent in \mathbb{R} . Die eben vorgestellte Konstruktion gewährleistet also die Existenz eines Grenzwertes, wenn eine C-Folge vorliegt. Diese Eigenschaft der reellen Zahlen nennt man Vollständigkeit.
- Die Ordnungsrelation ist vollständig, d.h. jede beschränkte (nicht leere) Teilmenge der reellen Zahlen besitzt eine kleinste obere Schranke (Supremum) und eine größte untere Schranke (Infimum).
- Es gibt keine bijektive (umkehrbar eindeutige) Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, während eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ existiert. Um beliebige Mengen A und B ihrer Größe nach zu vergleichen definiert man: A ist gleichmächtig mit (oder von gleicher Kardinalität wie) B , wenn es eine Bijektion $\varphi : A \rightarrow B$ gibt. Obige Aussage bedeutet also, dass \mathbb{N} gleichmächtig wie \mathbb{Q} (und damit auch gleichmächtig wie \mathbb{Z}) ist, dass aber \mathbb{R} von größerer Kardinalität als \mathbb{N} ist. In diesem Sinne kann die Größe unendlicher Mengen differenziert werden. \mathbb{R} und \mathbb{Q} sind demnach verschieden groß, während \mathbb{N} und \mathbb{Q} gleich groß sind.

Was die Darstellung reeller Zahlen betrifft, soll noch bemerkt werden, dass jede positive (negative) reelle Zahl x eine Darstellung als Dezimalbruch

$$x = (-)a_0.a_1a_2a_3\dots = (-) \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k} \right)$$

mit $a_0 \in \mathbb{N}$, $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ für $k = 1, 2, 3, \dots$ besitzt. Diese Darstellung ist eindeutig, wenn man die Periode 9, d.h. $a_k = 9$ für alle k größer einer gewissen Zahl k_0 , nicht zulässt. Für einige weitere Informationen zur Dezimaldarstellung reeller Zahlen siehe z.B. [1].

5 Komplexe Zahlen

Die Gleichung

$$x^2 = -1 \tag{3}$$

hat keine Lösung x in \mathbb{R} , denn für jede reelle Zahl x gilt $x^2 \geq 0$.

Zunächst soll eine Vorstellung entstehen, wie eine Erweiterung der reellen Zahlen aussehen könnte, in der eine Lösung von (3) existiert. Nehmen wir an, eine solche Erweiterung existiert und die Operationen haben die gewohnten Eigenschaften. Sei die Zahl i eine Lösung von (3), d.h. $i^2 = -1$. Dann lassen sich in diesem Zahlbereich mit Hilfe von Addition und Multiplikation Ausdrücke der Form $a + b \cdot i$, $a, b \in \mathbb{R}$, bilden. Für diese Ausdrücke gilt: $a_1 + b_1 \cdot i = a_2 + b_2 \cdot i \Leftrightarrow a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$, denn durch einfache Umformungen folgt aus der Ausgangsgleichung $a_1 - a_2 = (b_2 - b_1) \cdot i$. Wäre $b_1 \neq b_2$, also $b_2 - b_1 \neq 0$, so multiplizieren wir die letzte Gleichung mit $(b_2 - b_1)^{-1}$ und erhalten $i = (a_1 - a_2)(b_2 - b_1)^{-1} \in \mathbb{R}$, was nicht möglich ist. Also ist $b_1 = b_2$ und daraus folgt unmittelbar $a_1 = a_2$.

Bleiben alle Rechengesetze (Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetze) erhalten, so ergibt sich für die Operationen zwingend Folgendes:

$$\begin{aligned} (a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) &= a + c + b \cdot i + d \cdot i = (a + c) + (b + d)i, \\ (a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) &= ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

Formal kann man nun so vorgehen: Man betrachtet die Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und definieren dort Addition und Multiplikation entsprechend obiger Überlegungen:

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d), \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc). \end{aligned}$$

Jetzt muss nur nachgerechnet werden, dass tatsächlich alle Rechengesetze erhalten bleiben. Dies ist eine einfache Übungsaufgabe. Exemplarisch wird hier das multiplikative Inverse des Elementes (a, b) für $(a, b) \neq (0, 0)$ bestimmt ($(0, 0)$ ist ja das neutrale Element für $+$ und besitzt als einziges Element kein Inverses): Das neutrale Element bzgl. \cdot ist $(1, 0)$. Also erhalten wir für $(a, b)^{-1} = (x, y)$ die Beziehung

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0), \text{ also } ax - by = 1, \quad bx + ay = 0.$$

Dieses lineare Gleichungssystem für x, y besitzt die Lösungen $x = \frac{a}{a^2 + b^2}$, $y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$, also gilt

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

In der Darstellung komplexer Zahlen kehrt man zur vorher verwendeten Schreibweise zurück und setzt $a + ib = (a, b)$.

Alternativ dazu ist auch folgende Vorgangsweise bei der Einführung komplexer Zahlen möglich: Man definiert

$$\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

Die Addition und Multiplikation in \mathbb{C} wird dann wie für Matrizen üblich eingeführt. Die Abgeschlossenheit von \mathbb{C} bzgl. dieser Operationen, d.h. dass für $A, B \in \mathbb{C}$ auch $A + C$ und $A \cdot B$ in \mathbb{C} liegen, und die Gültigkeit der Rechengesetze ist einfach nachzuprüfen. Hierbei folgt z.B. die Assoziativität von \cdot und die Distributivität von \cdot bzgl. $+$ direkt aus den entsprechenden allgemein gültigen Gesetzen für Matrizen.

Bilanz:

- Die zentrale Eigenschaft der komplexen Zahlen lautet: Jede algebraische Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

$a_i \in \mathbb{C}, i = 0, 1, \dots, n, a_n \neq 0$ hat genau n Lösungen für x , wenn man jede Lösung mit entsprechender Vielfachheit zählt (Fundamentalsatz der Algebra). Diese Eigenschaft wird auch als algebraische Abgeschlossenheit der komplexen Zahlen bezeichnet. Ein Beweis dieses Satzes würde hier zu weit führen (siehe z.B. [2], Kapitel 4).

- Es existiert auf \mathbb{C} keine Ordnung, die mit den Operationen in der üblichen Form verträglich ist: Gäbe es eine Ordnung \leq auf \mathbb{C} , so müsste $i \geq 0$ oder $i \leq 0$ gelten. Im ersten Fall ergibt eine Multiplikation der Ungleichung mit i ($i \geq 0$, Ungleichung bleibt erhalten) die Ungleichung $-1 \geq 0$, Widerspruch zu $-1 < 0$. Im zweiten Fall ergibt eine Addition von $-i$ auf beiden Seiten $0 \leq -i$ und anschließende Multiplikation mit $-i$ führt zu $0 \leq (-i)^2 = -1$, Widerspruch.

6 Die Quaternionen

Im letzten Abschnitt wurden die komplexen Zahlen \mathbb{C} als Paare reeller Zahlen (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$, eingeführt. Damit hat man auf \mathbb{C} in natürlicher Weise eine Vektorraumstruktur aufgeprägt: Für $a_i, b_i, c \in \mathbb{R}$ hat man folgende Operationen:

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) + (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \\ c(a_1, b_1) &= (ca_1, cb_1). \end{aligned}$$

Jeder Vektor (a, b) lässt sich in eindeutiger Weise aus den Basisvektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$ linear kombinieren:

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1).$$

Dieser Vektorraum hat also (über \mathbb{R}) die Dimension 2 und die Basisvektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$ haben bezüglich der auf \mathbb{C} definierten Multiplikation sehr spezielle Eigenschaften: $(1, 0)$ ist das neutrale Element ($(1, 0) \cdot (a, b) = (a, b)$) und $(0, 1)$ löst die Gleichung $x^2 = -1$ (d.h. $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$).

Man kann leicht zeigen, dass jede Erweiterung der reellen Zahlen, in der die Grundrechnungsarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) den üblichen Rechengesetzen genügen eine solche Vektorraumstruktur aufweist. Als Vektorraum ist eine solche Erweiterung durch seine Dimension eindeutig charakterisiert.

Sucht man also nach Zahlbereichen, die die komplexen Zahlen enthalten, so ist es naheliegend, zunächst einmal den dreidimensionalen Fall zu betrachten. Hierbei stellt sich jedoch

rasch heraus, dass keine Erweiterung mit den gewünschten Eigenschaften möglich ist: Sei $K = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ und bezeichne zur Abkürzung $e = (1, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0)$, $j = (0, 0, 1)$ die kanonischen Basisvektoren und nehmen wir weiters für die Multiplikation dieser Zahlentripel in Analogie zu den komplexen Zahlen an, dass e das neutrale Element ist und $i \cdot i = -e$ gilt.² Das Produkt ij liegt wieder in K , also muss eine Darstellung

$$ij = a \cdot e + b \cdot i + c \cdot j$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ existieren. Setzt man insbesondere die Distributivität der Multiplikation voraus, so erhält man:

$$\begin{aligned} i(ij) &= i(a \cdot e + b \cdot i + c \cdot j) = a \cdot (ie) + b \cdot (ii) + c \cdot (ij) = \\ &= a \cdot i + b \cdot (-e) + c \cdot (a \cdot e + b \cdot i + c \cdot j) = \\ &= a \cdot i - b \cdot e + (ac) \cdot e + (bc) \cdot i + c^2 \cdot j = \\ &= (-b + ac) \cdot e + (a + bc) \cdot i + c^2 \cdot j. \end{aligned}$$

Aus der Assoziativität der Multiplikation folgt schließlich

$$i(ij) = (ii)j = (-e)j = -j = 0 \cdot e + 0 \cdot i - 1 \cdot j.$$

Vergleicht man nun diese beiden Darstellungen als Linearkombinationen von e, i und j , die ja eindeutig ist, so führt dies auf die Gleichungen

$$-b + ac = 0, \quad a + bc = 0, \quad c^2 = -1.$$

Die letzte Gleichung kann jedoch für $c \in \mathbb{R}$ unmöglich richtig sein, was zur Folge hat, dass in K eben keine Multiplikation definiert werden kann, die den üblichen Rechenregeln genügt.

W.R.Hamilton hat 1843 entdeckt, dass eine vierdimensionale Erweiterung (über \mathbb{R}) existiert, die fast allen Anforderungen genügt — lediglich die Kommutativität der Multiplikation muss geopfert werden: Sei also

$$\mathbb{H} := \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, 3, 4\}.$$

Die Addition wird der Vektorraumstruktur folgend komponentenweise erklärt:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4).$$

Zur Abkürzung führt man folgende Schreibweise ein:

$$\begin{aligned} e &= (1, 0, 0, 0), & i &= (0, 1, 0, 0), \\ j &= (0, 0, 1, 0), & k &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Die Multiplikation wird nun für die Basiselemente wie folgt festgelegt:

| | | | | |
|---------|-----|------|------|------|
| \cdot | e | i | j | k |
| e | e | i | j | k |
| i | i | $-e$ | k | $-j$ |
| j | j | $-k$ | $-e$ | i |
| k | k | j | $-i$ | $-e$ |

²Man kann sich überlegen, dass diese Annahmen keine weitere Einschränkung darstellen.

Das Element e spielt die Rolle des neutralen Elementes. Auf beliebige Elemente von \mathbb{H} wird die Multiplikation nun fortgesetzt, indem man Distributivität unterstellt und für die reellen Koeffizienten die Kommutativität mit allen Basiselementen fordert. Dadurch erhält man in Koordinatendarstellung:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4) = & (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4, \\ & a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3, \\ & a_1b_3 + a_3b_1 + a_4b_2 - a_2b_4, \\ & a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2) \end{aligned} \quad (4)$$

Die Objekte dieser algebraische Struktur $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ werden als Hamiltonsche Quaternionen bezeichnet. Für eine etwas ökonomischere Schreibweise wird auf den nächsten Abschnitt verwiesen.

Offensichtlich ist die Multiplikation nicht kommutativ. Dass alle übrigen Rechengesetze erfüllt sind, lässt sich durch einfaches (aber langwieriges) Nachrechnen bestätigen. Die komplexen Zahlen kann man als Teilmenge der Quaternionen auffassen, indem man nur Elemente der Form $(a, b, 0, 0)$, $a, b \in \mathbb{R}$, betrachtet. Diese Vorgangsweise ist jedoch nicht kanonisch — genauso gut könnte man z.B. die Elemente der Gestalt $(a, 0, b, 0)$ oder $(a, 0, 0, b)$ nehmen.

Wie schon die komplexen Zahlen lassen sich auch die Quaternionen alternativ zur eben besprochenen Vorgangsweise als spezielle 2×2 -Matrizen einführen:

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 + a_2i & -a_3 - a_4i \\ a_3 - a_4i & a_1 - a_2i \end{pmatrix} \mid a_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, 3, 4 \right\},$$

wobei die Einträge der Matrix als komplexe Zahlen zu verstehen sind. Addition und Multiplikation wird wie für Matrizen üblich festgelegt. Beim Nachprüfen der Rechengesetze kann man sich dadurch vielfach auf allgemein gültige Gesetze für Matrizen zurückziehen.

Dass die Multiplikation nicht kommutativ ist, hat einige bemerkenswerte Konsequenzen. So hat z.B. die quadratische Gleichung $x^2 = -1$ in \mathbb{H} unendlich viele Lösungen, nämlich alle $x = (0, a_2, a_3, a_4)$, die der Bedingung $a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1$ genügen.

7 Beschreibung von Drehungen im \mathbb{R}^3 mit Hilfe von Quaternionen

Für $A \in \mathbb{H}$, $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, heißt in Analogie zu den komplexen Zahlen $a_1 = \text{Re}(A)$ der Realteil und der Vektor $\vec{a} = (a_2, a_3, a_4) = \text{Im}(A)$ der Imaginärteil von A . Wir verwenden im Folgenden die Schreibweise $A = a_1 + \vec{a}$. Die Menge aller Quaternionen A mit $\text{Re}(A) = 0$ heißt Imaginärraum von \mathbb{H} und wird mit $\text{Im}\mathbb{H}$ bezeichnet. Für $\vec{a}, \vec{b} = (b_2, b_3, b_4) \in \text{Im}\mathbb{H}$ bezeichne $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$ das kanonische innere Produkt und $\vec{a} \times \vec{b}$ das Vektorprodukt. Dann kann man das Produkt der beiden (rein imaginären) Quaternionen \vec{a} und \vec{b} in der Form

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \vec{a} \times \vec{b}$$

schreiben (vgl. (4)). Wie für komplexe Zahlen existiert auch für Quaternionen eine Konjugation und eine Norm: Für $A = a + \vec{a}$ ist

$$\bar{A} = a - \vec{a}, \quad |A| = a^2 + |\vec{a}|^2.$$

Es gilt unter anderem:

$$\overline{A \cdot B} = \bar{B} \cdot \bar{A}, \quad |A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Des Weiteren gibt es für Quaternionen eine Art Analogon zur Polardarstellung komplexer Zahlen: Sei wieder $A = a + \vec{a}$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, dann gibt es ein eindeutig bestimmtes φ aus dem Intervall $(0, \pi)$, sodaß

$$\cos \varphi = \frac{a}{|A|}, \quad \sin \varphi = \frac{|\vec{a}|}{|A|},$$

und man erhält die Darstellung

$$A = |A| \left(\cos \varphi + \frac{\sin \varphi}{|\vec{a}|} \vec{a} \right).$$

Sei nun die Quaternion $A = a + \vec{a}$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}$ gegeben und φ der zu A gehörige Winkel. Für $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} \perp \vec{a}$, d.h. $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0$ hat die Multiplikation von A mit der (rein imaginären) Quaternion \vec{x} folgende geometrische Interpretation: Das Produkt $A \cdot \vec{x}$ ist eine rein imaginäre Quaternion, also in unserer Schreibweise ein Vektor aus \mathbb{R}^3 und entsteht aus \vec{x} durch Drehungstreckung mit Streckungsfaktor $|A|$ und Drehwinkel φ in der Ebene, die auf die von \vec{a} aufgespannte Gerade senkrecht steht, wobei die Drehrichtung von der Spitze von \vec{a} aus gesehen positiv ist.

Dies sieht man wie folgt ein:

$A \cdot \vec{x} = (a + \vec{a}) \cdot \vec{x} = a\vec{x} + \vec{a} \cdot \vec{x} = a\vec{x} - \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle + \vec{a} \times \vec{x} = a\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} \in \text{Im}\mathbb{H}$, $A \cdot \vec{x}$ ist also stets rein imaginär und aus der erhaltenen Darstellung folgt unmittelbar $\langle A \cdot \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0$, folglich liegt $A \cdot \vec{x}$ stets normal zu \vec{a} .

Aus $A \cdot \vec{x} = a\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x}$ und $\vec{a} \perp \vec{x}$ folgt weiters $|A \cdot \vec{x}|^2 = a^2|\vec{x}|^2 + |\vec{a}|^2|\vec{x}|^2 = |A|^2|\vec{x}|^2$, also $|A \cdot \vec{x}| = |A||\vec{x}|$, d.h. durch Multiplikation mit A wird die Länge jedes (zu \vec{a} senkrechten) Vektors mit dem Faktor $|A|$ multipliziert.

Schließlich gilt

$$\frac{\langle A \cdot \vec{x}, \vec{x} \rangle}{|A \cdot \vec{x}| |\vec{x}|} = \frac{a|\vec{x}|^2 + \langle \vec{a} \times \vec{x}, \vec{x} \rangle}{|A| |\vec{x}|^2} = \frac{a}{|A|} = \cos \varphi,$$

also schließt $A \cdot \vec{x}$ mit \vec{x} stets den Winkel φ ein.

Was die Orientierung der Drehung betrifft, so folgt die getroffene Aussage aus

$$\begin{aligned} \det(\vec{x}, A \cdot \vec{x}, \vec{a}) &= \det(\vec{x}, a\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x}, \vec{a}) = \\ \det(\vec{x}, \vec{a} \times \vec{x}, \vec{a}) &= \det(\vec{a}, \vec{x}, \vec{a} \times \vec{x}) > 0 \end{aligned}$$

(bekanntlich bilden $\vec{a}, \vec{x}, \vec{a} \times \vec{x}$ (in dieser Reihenfolge) ein Rechtssystem).

Es lassen sich auch alle Drehungen des \mathbb{R}^3 mit Hilfe der Quaternionen-Multiplikation sehr einfach beschreiben: Ist $A \in \mathbb{H}$, $|A| = 1$, also $A = \cos \varphi + \sin \varphi \vec{a}$ mit $|\vec{a}| = 1$ gegeben, so beschreibt die Abbildung

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} & \mapsto \bar{A} \cdot \vec{x} \cdot A \end{cases}$$

eine Drehung mit der von \vec{a} aufgespannte Gerade als Drehachse, Drehwinkel 2φ und einer von der Spitze von \vec{a} aus gesehen positiven Drehrichtung.

Hier sollen nur die wesentlichen Beweisschritte skizziert werden: Durch elementare Umformungen erhält man

$$f(\vec{x}) = \cos 2\varphi \vec{x} + (1 - \cos 2\varphi) \langle \vec{a}, \vec{x} \rangle \vec{a} + \sin 2\varphi \vec{x} \times \vec{a}.$$

Nun sieht man leicht, dass für $\vec{x} = c\vec{a}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist, $f(\vec{x}) = \vec{x}$ gilt, und für $\vec{x} \perp \vec{a}$ folgt $f(\vec{x}) = \cos 2\varphi \vec{x} + \sin 2\varphi \vec{x} \times \vec{a}$, d.h. \vec{x} wird in der zu \vec{a} senkrechten Ebene um den Winkel 2φ verdreht. Die Abbildung f ist auf Grund der Distributivität der Quaternionen-Multiplikation linear, d.h. es gilt $f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2)$ und $f(c\vec{x}) = cf(\vec{x})$, $c \in \mathbb{R}$. Jeder Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ kann in einen Anteil parallel zu \vec{a} und in einen orthogonal zu \vec{a} zerlegt werden, also in der Form $\vec{x} = c\vec{a} + \vec{y}$ mit $\vec{y} \perp \vec{a}$ dargestellt werden, woraus dann aus der Linearität und den obigen Überlegungen alles Weitere folgt.

Literatur

- [1] M.DRMOTA, Merkwürdige Dezimalzahlen, Didaktikhefte der ÖMG, Heft 29 (1998), 26-47
- [2] H.D.EBBINGHAUS ET AL., Zahlen, Springer Verlag, Berlin 1983
- [3] K.ENDL, W.LUH, Analysis 1, Aula Verlag, Wiesbaden 1986
- [4] F.REINHARDT, H.SOEDER, dtv-Atlas zur Mathematik, Band 1, Deutscher Taschenbuch Verlag, München 1994
- [5] R.TASCHNER, Lehrgang der konstruktiven Mathematik 1, Manz Verlag, Wien 1991
- [6] R.WINKLER, Lehrgang der Mathematik, Skriptum, TU Wien 1996

Gerhard Dorfer
Institut für Algebra und Computermathematik
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstr. 8-10/118, A-1040 Wien
E-mail: g.dorfer@tuwien.ac.at